RÉDUCTION

- Méthodes générales :
  - ⋆ Regarder ce qui se passe en petite dimension (2 ou 3) permet parfois d'éclairer les choses.
  - ⋆ Pour les endomorphismes, une base bien adaptée au problème permet de le transformer en un problème simple. C'est le cas aussi si l'espace se décompose en somme directe de sous-espaces simples.
  - ⋆ En travaillant avec des matrices dans $\mathbb{R}$, passer dans $\mathbb{C}$ permet d'avoir des propriétés intéressantes (pour trigonaliser par exemple).
- Détermination des éléments propres :
  - ⋆ Le polynôme caractéristique sert à déterminer les valeurs propres : il faut donc en donner une forme la plus factorisée possible. Si l'on calcule celui-ci par une méthode du pivot de Gauss en travaillant sur les lignes, les mêmes opérations permettent de déterminer les sous-espaces propres.
  - ⋆ Si on dispose d'un polynôme annulateur, les valeurs propres sont à chercher parmi les racines de celui-ci.
  - ⋆ Les valeurs propres sont **les** racines du polynôme caractéristique et aussi celles du polynôme minimal. Mais attention, pour un autre polynôme annulateur, ce sont seulement **des** racines.
  - ⋆ Lorsqu'une matrice se présente par blocs, on aura souvent intérêt à chercher les vecteurs propres par blocs : pour résoudre $AX = \lambda X$ où $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, on écrira $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.
- Diagonalisabilité :
  - ⋆ Avoir n valeurs propres distinctes en dimension n suffit.
  - ⋆ On peut ajouter les dimensions des sous-espaces propres (multiplicités géométriques) et comparer à la dimension de l'espace.
  - ⋆ Trouver un polynôme annulateur scindé simple est nécessaire et suffisant.
  - ⋆ Si on a une décomposition en sous-espaces stable, u est diagonalisable si et seulement s'il l'est sur chaque sous-espace.
  - ⋆ Lorsque A se présente par blocs, on peut aussi voir sur les blocs comment se traduit $P(A)$ pour un polynôme P.
  - ⋆ Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, il y a diagonalisabilité si et seulement si les dimensions de chaque sous-espace propre sont égales aux multiplicités des valeurs propres.
  - ⋆ On verra plus tard qu'une matrice symétrique **réelle** est automatiquement diagonalisable.
  - ⋆ Savoir diagonaliser complètement en petite dimension, et savoir en déduire puissance de matrice, terme général de suites récurrentes, commutant ou sous-espaces stables par une matrice.
- Trigonalisation :
  - ⋆ Sur $\mathbb{C}$, c'est automatique. On effectue assez rarement des calculs explicites de trigonalisation.
  - ⋆ Mais le fait que toute matrice complexe soit trigonalisable est d'usage courant.
  - ⋆ Être trigonalisable, c'est être annulé par un polynôme scindé.
- Le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux sont d'un usage fréquent (et ils vont souvent ensemble).

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Éléments propres et diagonalisation

1

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2-7a & a-7 & a \end{pmatrix}$ admet-elle une valeur propre double ? Pour ces valeurs, A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2 **CCINP 73** On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

3 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le terme général des suites x, y, z définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Im}\, A$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que tout vecteur non nul x soit un vecteur propre. Que dire de u ?

6 Déterminer le commutant et les racines carrées de la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 10 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

7 **CCINP 67** Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

8 **CCINP 59** Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E$, $f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   1.a) sans utiliser de matrice de f,
   1.b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

9 Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $A^\intercal$ l'est.

10 **CCINP 69** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

11 Déterminer les valeurs propres de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

12 **CCINP 83** Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

13 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne ($a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé simple.

14 Quelles sont les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables ?

15 **Densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$** Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$ suffisamment proche de 0, $A - \lambda I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ au sens où $A^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} A$ lorsque pour tout (i, j), $a_{i,j}^{(k)} \to a_{i,j}$.

Retrouver le résultat en exploitant le fait que tout matrice de rang r est équivalente à J_r.

16 On souhaite démontrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat si on suppose de plus que $A \in \mathcal{GL}(\mathbb{K})$.
2. En déduire le résultat si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en utilisant l'exercice précédent.
3. Retrouver le résultat dans le cas général en calculant le produit dans les deux sens de $\begin{pmatrix} A & XI_n \\ I_n & (0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -B & XI_n \\ I_n & -A \end{pmatrix}$.

17 **CCINP 70** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

18 **Matrices circulantes** Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.
2. En déduire la déterminant dit circulant $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

19 **CCINP 63**

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.
3. Justifier que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A ?

20 **CCINP 72** Soit n un entier naturel non nul.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

21 **Matrices de rang 1**

1. Montrer que $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $XY^\intercal$ où X, Y sont des colonnes non nulles de taille à déterminer. Comment s'exprime sa trace en fonction de X et Y ?
2. On suppose que $p = q$. Donner, suivant les valeurs de sa trace, les valeurs propres de A. Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.

22 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice A.
2. Démontrer, sans déterminer ses sous-espaces propres, que A n'est pas diagonalisable.
3. Justifier que A est trigonalisable, puis trigonaliser A.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

23 **Théorème de Gerschgorin** En utilisant le résultat d'inversibilité des matrices à diagonale strictement dominante ($\forall\, i,\ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$) ou le principe de sa démonstration, montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, chaque valeur propre complexe de A se trouve dans un disque de Gerschgorin de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Donner pour chaque valeur propre un disque de centre 0 dans lequel elle se trouve.

2. Matrices et endomorphismes nilpotents

24 Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

25 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.

1. Montrer que u est un endomorphisme nilpotent et donner son indice de nilpotence.
2. Écrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

27 Montrer que sur $\mathbb{C}$, une matrice est nilpotente si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}$?

28 Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente.

1. Montrer que $I_n - N$ et $I_n + N$ sont inversibles et calculer leurs inverses en fonction de N.
2. En considérant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer une matrice M dont le carré est égal à $I_n + N$.

29 **Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fin $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Démontrer que $\mathscr{F} = \left(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right)$ est une famille libre de E.
3. Retrouver le fait que $p \leqslant n$
4. Dans cette question, on suppose que $p = n$.

   4.a) Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   4.b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.

   4.c) Soit F sous-espace de E stable par u de dimension $k \geqslant 1$. En considérant l'endomorphisme u_F induit par u sur F, montrer que $F = \operatorname{Ker} u^k$.

30 **Commutant d'un endomorphisme nilpotent** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\mathscr{B} = \left(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a)\right)$ est une base de E.
2. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}' = \left(f^{n-1}(a), \ldots, f(a), a\right)$.
3. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $v \in \left(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$.
   Indication : on pourra introduire les coordonnées de $g(a)$ dans la base $\mathscr{B}$.

31 Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{tr} A^k = 0$.

3. Polynômes annulateurs

32 **CCINP 91** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A. Vérifier que le polynôme caractéristique de A en est un polynôme annulateur.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

33 **CCINP 65** Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
   $$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

34 **CCINP 88**

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
   Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \operatorname{tr}(M) A$.
   2.a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   2.b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l'aide de la question 1.).

35 **CCINP 93** Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

36 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer M^2 en fonction de M et I_3. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer sans calcul le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de M.
3. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

37 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 + A^\top = I_n$. Démontrer que A est diagonalisable.

38 Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, $\operatorname{tr} A = 3$ et A est non inversible.

4. Réduction par blocs

39 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

40 Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si et seulement si A et B le sont.
2. Soit C à p lignes et q colonnes, $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
   On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune.
   Montrer que N est diagonalisable et semblable à M.

41 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur M pour que A soit diagonalisable.

42 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(B)$ en fonction de A, $P(A)$ et $P'(A)$.
3. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.
4. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.