Révisions : matrices et déterminants

- Il faut bien sûr savoir multiplier entre elles des matrices, mais aussi bien connaître la formule donnant les cœfficients d'un produit de matrice (penser à une relation *type Chasles*.)
- Pour calculer les puissances d'une matrice carrée, on peut :
  - ⋆ soit conjecturer le résultat puis le prouver par récurrence,
  - ⋆ soit l'écrire comme somme de deux matrices simples qui commutent et utiliser la formule du binôme,
  - ⋆ soit trouver un polynôme qui annule la matrice et effectuer la division euclidienne de X^n par ce polynôme,
  - ⋆ ou encore la diagonaliser si c'est possible pour calculer simplement ces puissances (voir chapitre sur la réduction).
- Il faut savoir employer la méthode du pivot de Gauss pour calculer le rang (opération sur lignes ou colonnes ou les deux).
- Pour inverser une matrice :
  - ⋆ Il faut savoir employer la méthode du pivot de Gauss (là, il faut choisir : soit les lignes, soit les colonnes).
  - ⋆ Il est souvent commode de résoudre le système linéaire $Y = AX$ pour obtenir $X = A^{-1}Y$.
  - ⋆ Si on connaît un polynôme annulateur de A, il faut savoir en déduire, si elle existe, l'inverse de A.
- Lorsque l'on cherche les matrices vérifiant une relation vraie pour toute matrice M, il est souvent judicieux d'essayer $M = E_{i,j}$.
- Bien savoir écrire une matrice d'une application linéaire, bien sûr, mais aussi bien connaître les formules de changement de base, dans le bon sens.
- Une combinaison linéaire nulle des colonnes donne un élément du noyau d'une matrice et son image est engendrée par ses vecteurs colonnes.
- Des matrices équivalentes sont des matrices de même rang, c'est facile.
  Pour les matrices semblables c'est moins simple. On peut s'intéresser aux invariants de similitude (comme la trace ou le déterminant) ou voir si les matrices représentent un même endomorphisme...
- Le résultat théorique principal de la théorie du déterminant est que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1 : il est parfois utile dans la pratique pour montrer qu'on est proportionnel au déterminant dans une base donnée.
- On se sert rarement de l'expression développée du déterminant. Les opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes permettent de faire apparaître des cœfficients nuls pour se ramener à une matrice triangulaire ou diagonale, ou pour développer par rapport à une ligne ou une colonne.
- Un développement par rapport à une ligne ou une colonne permet d'ailleurs parfois de trouver une relation de récurrence entre un déterminant de taille n et des déterminants similaires de tailles inférieures.
- Si le déterminant d'un produit est le produit des déterminants, ce n'est pas valable pour une somme. Cependant, la multilinéarité par rapport aux colonnes (ou aux lignes) alliée au caractère alterné permet parfois de simplifier des déterminants. Attention aussi : $\det(\lambda A) = \lambda^{n} \det A$.
- On essaye, dans la mesure du possible, d'obtenir une forme factorisée du déterminant, car on a besoin en général de savoir à quelles conditions il est nul (inversibilité).
- Le déterminant est polynomial en les coefficients d'une matrice et donc continu. C'est parfois utile, pour des passages à la limite, par exemple.

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Calcul matriciel

1 Calculer les puissances entières (préciser si les expressions sont valables dans $\mathbb{Z}$) de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par le binôme ou en déterminant un polynôme annulateur de A. Donner l'expression, plus généralement, de $P(A)$ pour tout polynôme P.

Retrouver le résultat en considérant $Q^{-1}MQ$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2 Montrer que, si $a \in \mathbb{K}$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -a \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

3 Soit $A = (1 - \delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. En calculant A^2, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

4 Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AM = MA.$$

5 Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, deux à deux distincts, et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.

6 Que dire de $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$?

7 Déterminer les matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

8 Montrer que pour toute matrice carrée A, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant tel que $P(A) = 0$. En déduire que si A est inversible, A^{-1} est un polynôme en A.
Que peut-on dire de l'inverse d'une matrice inversible dans une sous-algèbre $\mathscr{B}$ de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$?

9 **Matrices à diagonale strictement dominante**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout i entre 1 et n, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

En calculant $\operatorname{Ker} A$, montrer que A est inversible.

10 Soit $A=\begin{pmatrix}2&-1&1&5\\-1&2&3&-4\\3&0&5&6\end{pmatrix}$. Déterminer l'image et le noyau de A.

11 Déterminer le rang de $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\1&0&1&0\end{pmatrix}$. Expliciter deux matrices carrées inversibles U et V telles que $UAV=J_{3,4,r}$ où $r=\operatorname{rg}A$.

12 Quel est le rang de $A=(\sin(i+j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$?

13 Soit $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes $U,V\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $H=U\,{}^tV$ et qu'alors $\operatorname{tr}H={}^tVU$.

14 On considère les quatre matrices : $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$.

La matrice A est-elle semblable à B ? à C ? à D ?

15 Soit $A=\begin{pmatrix}18&14&34\\-5&-3&-10\\-6&-5&-11\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Montrer que A et B sont semblables, puis expliciter $P\in\mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B=P^{-1}AP$.

2. Matrices d'applications linéaires

16 **Exercice 71 des CCINP**

Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x+y+z=0$, parallèlement à la droite D d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3=P\oplus D$.
2. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

17 Reconnaître et étudier les endomorphismes canoniquement associés aux matrices $\begin{pmatrix}1&3&-6\\0&2&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}7&-2&-2\\16&-5&-4\\8&-2&-3\end{pmatrix}$.

18 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^\star$ et $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que $u^n=0$ et $u^{n-1}\neq0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E pour laquelle : $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{pmatrix}$.

19 Les matrices suivantes sont-elles semblables ? $A=\begin{pmatrix}3&6&-5&-2\\-1&-6&5&-2\\-1&-10&8&-3\\0&-3&2&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&2&6&21\\0&2&2&5\\0&0&3&2\\0&0&0&5\end{pmatrix}$.

20 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle telle que $A^2=0$. Montrer que A est semblable à $B=\begin{pmatrix}0&I_r\\0&0\end{pmatrix}$.

21 En utilisant les matrices J_r, montrer que si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}A&(0)\\(0)&B\end{pmatrix}=\operatorname{rg}A+\operatorname{rg}B$.

Retrouver ce résultat en utilisant l'interprétation géométrique des matrices par blocs.

22 **Exercice 59 des CCINP**

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P\in E,\ f(P)=P-P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   - **1.a)** sans utiliser de matrice de f,
   - **1.b)** en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q\in E$. Trouver P tel que $f(P)=Q$.
   Indication : si $P\in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. ~~f est-il diagonalisable ?~~

3. Déterminant

23 Montrer que deux transpositions de $\mathfrak{S}_n$ commutent si et seulement si elles sont à supports disjoints. En déduire que le centre de $\mathfrak{S}_n$ est réduit à l'identité.

24 Calculer $\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\-1&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\-1&\cdots&-1&0\end{vmatrix}$

25 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$, en utilisant le déterminant de Vandermonde[1] de a, b, c, x, puis directement.

26 Soient $\mathscr{B}$ une base de E de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que, pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E,

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}\big(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n\big) = \operatorname{tr}(u) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

27 Exercice 63 des CCP

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.
3. ~~Justifier que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A ?~~

28 Déterminant de Hürwitz

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On pose $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}$.

1. Si $a \neq b$, on pose $\Delta(x)$ le déterminant obtenu en ajoutant x à chaque cœfficient de $D_n(a,b)$. Vérifier Δ est une fonction affine de x et en déduire $D_n(a,b)$.
2. On supposeque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En déduire $D_n(a,a) = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x_n \end{vmatrix}$.
3. Pour $\mathbb{K}$ quelconque, retrouver l'expression de $D_n(a,a)$ en utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport à ses colonnes.

1.  **Alexandre-Theophile Vandermonde** (Paris, 1735 - 1796) est un mathématicien français. Il travaille sur les équations algébriques, préfigurant la théorie de Galois, sur la théorie des déterminants : le déterminant de Vandermonde est $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ et en analyse combinatoire, formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N}{n-k} = \binom{M+N}{n}$.

29 Calcul par dérivation

1. Soient $a, b, c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $f : x \mapsto \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$. Montrer que f est dérivable et que $f' : x \mapsto \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.
2. Généraliser à un déterminant $n \times n$.
3. Application : calculer, pour $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$, puis $\begin{vmatrix} a & 1 & & 0 \\ a^2/2! & a & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a^n/n! & \dots & a^2/2! & a \end{vmatrix}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

30

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $M \in \mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

1. On suppose dans cette question seulement que $C = 0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$. Retrouver le résultat du cours donnant le déterminant de M en remarquant que

$$M = \begin{pmatrix} I_n & (0) \\ (0) & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & I_p \end{pmatrix}.$$

2. On suppose désormais que A est inversible.

2.a) Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & (0) \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ (0) & I_p \end{pmatrix}$. puis que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det A \times \det\big(D - CA^{-1}B\big).$$

2.b) On suppose de plus que $n = p$ et que A et C commutent. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB).$$

Donner un résultat analogue lorsque A et B commutent.

31 Calculer le déterminant de $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^{\mathsf{T}} \end{array} \right.$ directement puis en utilisant $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

32 Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\tilde{A}$ sa comatrice. Montrer que $\operatorname{rg} \tilde{A} = \left| \begin{array}{ll} n & \text{si } \operatorname{rg} A = n \\ 1 & \text{si } \operatorname{rg} A = n-1 \\ 0 & \text{si } \operatorname{rg} A \leqslant n-2 \end{array} \right.$ En déduire $\det \tilde{A}$ et $\tilde{\tilde{A}}$ pour $n \geqslant 3$.

33 Le but est de démontrer le résultat suivant : si deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont aussi dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour cela, on considère une matrice $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$, condition que l'on écrire $PB = AP$. On note alors P_1 la matrice dont les cœfficients sont les parties réelles de ceux de P, P_2 la matrice dont les cœfficients sont les parties réelles de ceux de P,

1. Démontrer que $P_1 B = AP_1$ et $P_2 B = AP_2$.
2. Démontrer que l'application $x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ n'est pas constamment nulle sur $\mathbb{R}$ et en déduire le résultat.

34 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ soit inversible et ait une inverse à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

35 **Matrices de permutations** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle matrice de permutation associée à σ la matrice $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Quel est l'endomorphisme canoniquement associé à P_σ ?
2. Déterminer, pour $\sigma, \rho \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma \times P_\rho$.
3. Montrer que $\left(\{P_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}, \times\right)$ est un groupe isomorphe à $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.
4. Montrer que $P_\sigma^\top = P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1}$.
5. Quel est le résultat d'une multiplication à gauche ou à droite par une matrice de permutation ?
6. Calculer le déterminant de P_σ.