Révisions d'algèbre linéaire

- Savoir démontrer que des sous-espaces sont supplémentaires est essentiel, et la raisonnement usuel est celui de l'analyse-synthèse pour y parvenir en dimension quelconque, ou, pour deux sous-espaces, dimension + intersection en dimension finie.
- Ne pas hésiter à dessiner en dimension 2 ou 3 pour voir ce qui se passe (notamment pour les projecteurs ou les symétries).
- Attention, pour plus deux sous-espaces, la somme est directe n'équivaut pas à l'intersection des tous les sev est réduite à 0.
- Le fait qu'un sous-espace de même dimension (finie) de E est E tout entier est souvent très utile.
- Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension, être bijectif, injectif ou surjectif, c'est pareil. Pratique, non ? Et pour l'injectivité, on calcule le noyau !
- Le théorème du rang est un résultat extrêmement important. Il faut en connaître parfaitement l'énoncé COMPLET (ne pas se contenter de la formule). Attention : il ne dit pas que l'image et le noyau sont supplémentaires !
- Un argument souvent utilisé en algèbre linéaire : pour montrer que deux expressions linéaires sont égales, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur une base.

1. Espaces vectoriels

1 Montrer que l'ensemble des suites réelles p-périodique où $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2 Étudier l'indépendance linéaire de $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$, $(x \mapsto \mathrm{e}^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x \mapsto \cos(ax))_{a\in\mathbb{R}}$.

3 $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$, $F = \{f \in E \text{ constante}\}$, $G = \{f \in E \text{ nulle sur } [-1,0]\}$ et $H = \{f \in E \text{ nulle sur } [0,1]\}$. Montrer que F, G, H sont supplémentaires dans E.

2. Dimension finie

4 **Exercice 55 de CCP**

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a-1)u_n \text{ avec } (u_0,u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

5 Montrer que $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

6 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G$ possède au moins un vecteur non nul.

7 Soit $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ tel que le $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ soit de dimension finie $\dim_{\mathbb{L}} \mathbb{K} = p$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim_{\mathbb{K}} E = n$.
Montrer que E est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim_{\mathbb{L}} E = pn = \dim_{\mathbb{L}} \mathbb{K} \dim_{\mathbb{K}} E$.

3. Applications linéaires

8 **Exercice 64 des CCINP**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Démontrer que si $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

2.

2.a) Démontrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

2.b) Démontrer que si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, alors $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

9 **Exercice 93 des CCINP**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. Montrer que $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

10 **Exercice 60 des CCINP**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

2. f est-il surjectif ?

3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

11 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 - 4u + 3\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que u est automorphisme, déterminer u^{-1} puis montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}_E) = E$. Quelle transformation u représente-t-elle ?

12 Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer

1. $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u) = u^{-1}(\operatorname{Ker} v)$ et $v(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.
2. $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u \iff \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u = \{\vec{0}_F\}$.
3. $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v \iff \operatorname{Ker} v + \operatorname{Im} u = F$.

13 Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

14 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est liée. Démontrer que u est une homothétie.

15 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p, q deux projecteurs. Démontrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

16 Soient p, q deux projecteurs sur un espace vectoriel E tel que $p \circ q = 0$. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur sur $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

17 **Images et noyaux itérés**

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $F_n = \operatorname{Im} u^n$ et $G_n = \operatorname{Ker} u^n$ forment des suites de sous-espaces respectivement décroissante et croissante (pour l'inclusion). Montrer qu'elles sont stationnaires à partir d'un même rang p si E est de dimension finie, et que F_p et G_p sont supplémentaires.

18 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que

$$|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

19 Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que

$$\operatorname{rg} v \circ u \geqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim F.$$

20 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg} u = 1$. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

21 Soient E un espace vectoriel de dimension finie de $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que sont équivalentes

1. $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$
2. $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$
3. $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$

22 Soient E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

23 Montrer qu'une forme linéaire est soit nulle soit surjective.

24 Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi : M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$.
2. On suppose que pour tout $(M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(MN) = \varphi(NM)$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$.