

c Ex 23: Polynômes de Legendre

$$L_m = \frac{((x^2-1)^m)^{(m)}}{2^m m!} \rightarrow \text{de degré } 2m$$

1) $(\deg L_m = 2m - m = m)$

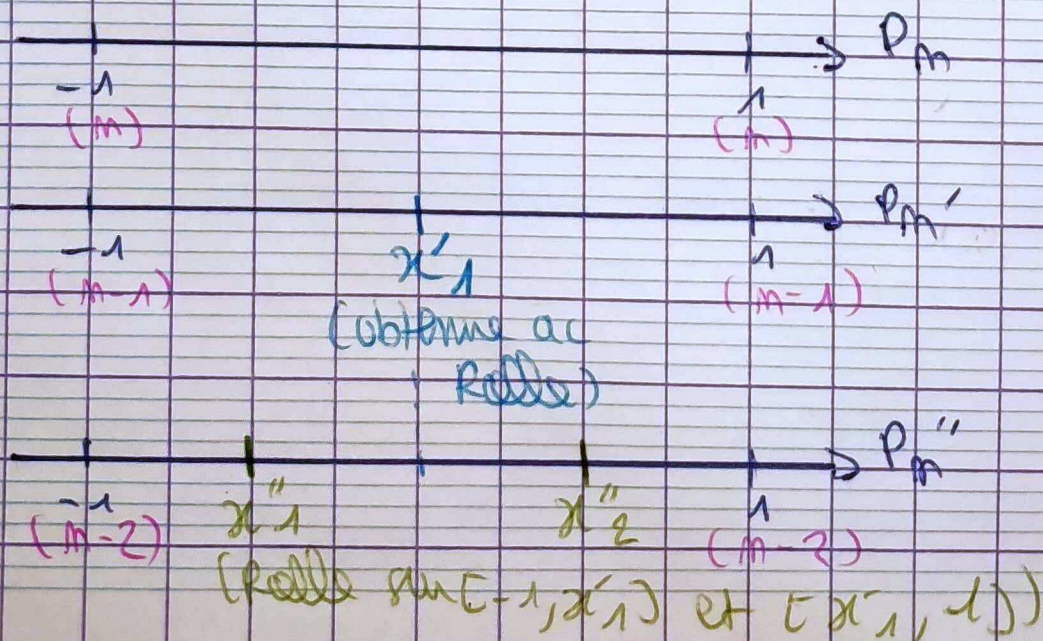
$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{2^m m!} ((x^2-1)^m)^{(m)} \\ &= \frac{1}{2^m m!} (x^{2m} + \underbrace{P})^{(m)} \\ &= \frac{1}{2^m m!} [(x^{2m})^{(m)} + \underbrace{P^{(m)}}_{\text{où } \deg P \leq 2m}] \\ &= \frac{1}{2^m m!} [2m(2m-1) \dots (m+1) x^m + \underbrace{P^{(m)}}_{\text{de } \deg \leq m}] \end{aligned}$$

Terme dominant :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^m m!} \times \frac{(2m)!}{m!} x^m \\ \text{dc } \deg L_m &= m \\ \text{cd } L_m &= \frac{1}{2^m} \times \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \frac{\binom{2m}{m}}{2^m} \end{aligned}$$

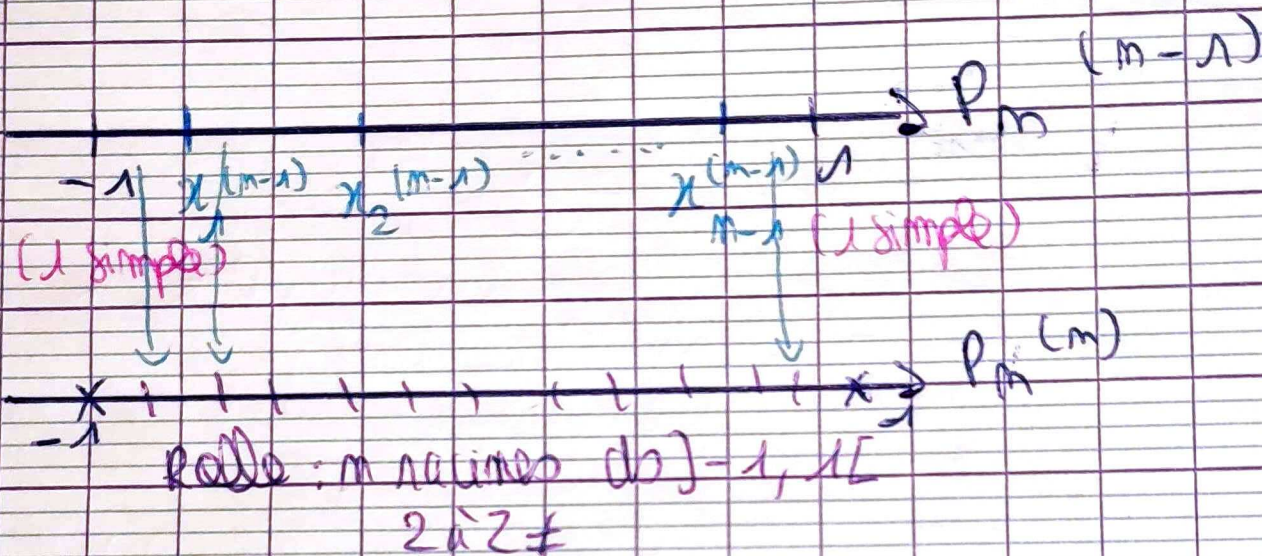
2) dériver L_m m ou $(m+1)$ ou $(m-1)$ fois puis formule de Leibniz

3) L_m s'écrit simple à l'aide des $-1, 1 \in$
 $P_m = (x^2-1)^m = (x-1)^m (x+1)^m$
 ± 1 racines d'ordre m



Thm de Rolle:

- $\tilde{p}_m \in C^0$ sur $[-1, 1]$
 - $\tilde{p}_m$ dérivable sur $] -1, 1[$
 - $\tilde{p}(1) = \tilde{p}_m(-1) (=0)$
- $\exists x \in] -1, 1[, \tilde{p}'_m(x) = 0$



$$L_m = \frac{1}{2^m m!} P_m^{(m)} \text{ de degré } m$$

de On les en les et elles sont des simples: $x_1, \dots, x_m$

$$\text{On a } Q \in K[x] \text{ tq } P = Q \prod_{i=1}^m (x - x_i)$$

$$\text{ac } \deg P = \deg Q + m$$

$$\text{de } \deg Q = 0 \quad : \quad Q = \lambda \text{ ou } \lambda \in K^*$$

de P scindé.