CORRIGÉS D'EXERCICES

1. Exercice 39

1. On remarque que $P_n = \overline{P_n}$ donc $\boxed{P_n \in \mathbb{R}[X].}$

On a, comme somme de deux polynômes de degré $2n+1$, que $\deg P_n \leqslant 2n+1$. Le terme en X^{2n+1} est $\dfrac{X^{2n+1} - X^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = 0$, et par le binôme, celui en X^{2n} est $\dfrac{\binom{2n+1}{1}\mathrm{i}X^{2n} - \binom{2n+1}{1}(-\mathrm{i})X^{2n}}{2\mathrm{i}}$ *ie* $(2n+1)X^{2n}$. Donc $\boxed{\deg P_n = 2n}$ et $\boxed{\mathrm{cd}(P_n) = 2n+1.}$

On peut aussi voir tout cela en utilisant la formule du binôme :

$$P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{i}^k X^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{i}^k X^{2n+1-k}\right).$$

Comme les termes d'indice pair s'annulent dans les deux sommes, on obtient alors, en écrivant $k = 2p+1$,

$$P_n = \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}\mathrm{i}^{2p+1}X^{2n+1-(2p+1)} = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{2(n-p)}.$$

ce qui redonne les trois résultats.

---

2. z est racine de P_n si et seulement si $(z+\mathrm{i})^{2n+1} = (z-\mathrm{i})^{2n+1}$. Comme $\mathrm{i}(\neq 0)$ n'est pas solution, c'est équivalent à $\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^{2n+1} = 1$ soit encore $(\star)$ $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}$ où $k \in [\![0, 2n]\!]$. On peut éliminer $k = 0$ car cela ne donne aucune solution en z.

Or $(\star) \Longleftrightarrow (z+\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}(z-\mathrm{i}) \Longleftrightarrow z = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}-1} = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}+\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}-\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}} = \mathrm{cotan}\dfrac{k\pi}{2n+1}$.

On en déduit que $\boxed{P_n \text{ possède } 2n \text{ racines : les } \mathrm{cotan}\dfrac{k\pi}{2n+1} \text{ pour } k \in [\![1, 2n]\!].}$

Par injectivité de cotan sur $]0, \pi[$, elle sont distinctes et comme P est de degré $2n$, on obtient $\boxed{P = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \mathrm{cotan}\dfrac{k\pi}{2n+1}\right).}$

---

3. Vu l'expression trouvée dans la première question, si $\boxed{Q_n = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{n-p},}$ alors $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n = Q_n(X^2)$. On a alors $\boxed{\deg Q_n = n}$ et $\boxed{\mathrm{cd}(Q_n) = 2n+1.}$

De plus, si z est racine de P_n, z^2 est racine de Q_n. Ainsi, d'après la question précédente, les $\mathrm{cotan}^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$ pour $k \in [\![1, 2n]\!]$ sont racines de Q_n.

Mais pour $k \in [\![1, n]\!]$, $0 < k \leqslant n$ donc $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} \leqslant \dfrac{n}{2n+1}\pi < \dfrac{\pi}{2}$, et $\mathrm{cotan}^2 = \dfrac{1}{\tan^2}$ est injective sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (car strictement décroissante).

Cela donne donc n racines deux à deux distinctes d'un polynôme de degré n : on les a toutes.

$\boxed{\text{Les racines de } Q_n \text{ sont donc les } \mathrm{cotan}^2\dfrac{k\pi}{2n+1} \text{ pour } k \in [\![1, n]\!].}$

---

4. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ est la somme des racines de Q_n. donc si on note q_i ses cœfficients, $S_n = -\frac{q_{n-1}}{q_n} = -\frac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)}$ donc $\boxed{S_n = \frac{n(2n-1)}{3}.}$

De plus, si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{cotan}^2 x = \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.

Donc $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = S_n + n$. Donc $\boxed{T_n = \frac{2n(n+1)}{3}.}$

---

5. De simples études de fonctions, ou l'intégration de $\cos t \leqslant 1 \leqslant 1 + \tan^2 t$ sur $[0, x]$ permettent d'obtenir $\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sin x \leqslant x \leqslant \tan x.}$

---

6. Avec la question précédente, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, comme tout est positif,

$$\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \leqslant \left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 \leqslant \tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Comme de plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\mathrm{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} \leqslant \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}.$$

En sommant, on obtient

$$S_n \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant T_n.$$

Ainsi,

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} S_n = \pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \pi^2 \frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} T_n.$$

Finalement, par encadrement, $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

2. Exercice 41

Première méthode Appliquer l'algorithme d'Euclide à a et b (si $b \neq 0$).

$a = bq + r$ avec $r < b$.

Donc

$$\begin{aligned} X^a - 1 &= X^{bq+r} - 1 \\ &= \left(X^b\right)^q \cdot X^r - 1 \\ &= \left(\left(X^b\right)^q - 1 + 1\right) \cdot X^r - 1 \\ &= \left(\left(X^b\right)^q - 1^q\right) \cdot X^r + X^r - 1 \\ &= \left(X^b - 1\right) \cdot P \cdot X^r + X^r - 1 \end{aligned}$$

avec $\deg X^r - 1 = r < b = \deg X^b - 1$.

Le reste de la div. euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ est $X^r - 1$:

$$\left(X^a - 1\right) \wedge \left(X^b - 1\right) = \left(X^b - 1\right) \wedge \left(X^r - 1\right)$$

Les algorithmes d'Euclide s'écrivent de la même manière pour les entiers et les polynômes.
Dernier reste non nul ?

$$\left(X^a-1\right)\wedge\left(X^b-1\right)=\left(X^d-1\right)\wedge\left(X^0-1\right)=X^d-1.$$

Si $b=0$, $(X^a-1)\wedge\left(X^b-1\right)=(X^a-1)\wedge 0=X^a-1=X^d-1$.

Deuxième méthode Racines complexes

Racines communes de X^a-1 et X^b-1 ? But : celles de X^d-1.

- Soit $z\in\mathbb{C}$ racine de X^d-1 ie $z^d=1$. Alors $z^a=1$ et $z^b=1$. On a a', b' tels que $a=da'$ et $b=db'$.
  Alors $z^a=\left(z^d\right)^{a'}=1^{a'}=1$. et idem pour $z^b=1$.
- Soit z racine commune. On a $u,v\in\mathbb{Z}$ tels que $au+bv=d$.
  $z^d=z^{au+bv}=(z^a)^u\left(z^b\right)^v=1$.

Or toutes ces racines sont simples (connu) dans X^a-1 et X^b-1 donc dans le pgcd et aussi dans X^d-1 et tous les polynômes sont unitaires (dont LE pgcd) donc $(X^a-1)\wedge\left(X^b-1\right)=X^d-1$.

Remarque : la première méthode fonctionne aussi pour montrer par exemple que

$$\left(2^a-1\right)\wedge\left(2^b-1\right)=\left(2^d-1\right).$$