CORRIGÉ DU DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 1

Problème 1 : Différences finies et polynômes de Newton

A. Étude de l'endomorphisme Δ (d'après ENGEES PC 2000)

1.a) $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est une famille de $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre, ce qui est le cas car les polynômes sont à degrés étagés ($\deg N_k = k$).

Donc $\boxed{(N_0, N_1, ..., N_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

1.b) On a $\boxed{\Delta(N_0) = \Delta(1) = 0}$ et si $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\Delta(N_k) &= \frac{1}{k!}\left((X+1)X\cdots(X-k+2) - X(X-1)\cdots(X-k+1)\right)\\ &= \frac{1}{k!}X(X-1)\cdots(X-k+2)\Big(X+1-(X-k+1)\Big)\\ &= \frac{1}{k!}N_{k-1}\times k\end{aligned}$$

donc $\boxed{\Delta(N_k) = N_{k-1} \text{ si } k > 0.}$

---

2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta(P) = P(X+1) - P \in \mathbb{R}[X]$ et si $Q \in \mathbb{R}[X], \lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta(P + \lambda Q) = \Delta(P) + \lambda\Delta(Q)$ donc $\boxed{\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X]).}$

De plus, si $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 0$, d'après la première question, on peut le décomposer sous la forme $P = a_0N_0 + \cdots + a_nN_n$ et alors, d'après la question précédente, $\Delta(P) = a_1N_0 + a_2N_1 + \cdots + a_nN_{n-1}$. Mais comme la famille $(N_0, N_1, ..., N_{n-1})$ est libre, on en déduit que $a_1 = \cdots = a_n = 0$ puis que $P = a_0N_0$ est constant.

Réciproquement, tout polynôme constant est bien dans le noyau et donc $\boxed{\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X].}$

Autre argument possible : si $\Delta(P) = 0$, $P(X+1) = P$ et P est constant : par l'absurde, si P n'est pas constant, par théorème de D'Alembert-Gauss, P a une racine z complexe. Mais alors, comme $P(X+1) = P$, $z+1$ en est aussi une. Puis, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $z+k$ est racine de P : $P \in \mathbb{C}[X]$ a alors une infinité de racine donc $P = 0$, ce qui est contradictoire.

Puis si $P \in \mathbb{R}[X]$, en décomposant P sous la forme $P = a_0N_0 + \cdots + a_nN_n$ (avec n tel que $P \in \mathbb{R}_n[X]$), on voit que $P = \Delta(a_0N_1 + \cdots + a_nN_{n+1})$ et donc Δ est surjective ce qui permet d'affirmer que $\boxed{\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}[X].}$

3.a) On a $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) = \Delta(\operatorname{Vect}(N_0, \ldots, N_n)) = \operatorname{Vect}(\Delta(N_0), \ldots, \Delta(N_n)) = \operatorname{Vect}(N_0, \ldots, N_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ d'après la première question et la linéarité de Δ. Donc $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } \Delta.}$

3.b) $\boxed{\operatorname{Ker}\Delta_n = \operatorname{Ker}\Delta \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X]}$ $(= \operatorname{Ker}\Delta)$ et $\boxed{\operatorname{Im}\Delta_n = \Delta_n(\mathbb{R}_n[X]) = \Delta(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$ d'après le calcul de la question précédente.

3.c) Vu la question **1.b**, on a directement que la matrice est $\boxed{\mathscr{M}_{(N_0,\dots,N_n)}(\Delta_n) = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}}$.

Comme elle est triangulaire supérieure stricte et de taille $n+1$, $M^{n+1} = (0)$ et donc $\boxed{(\Delta_n)^{n+1} = 0.}$

3.d) Soit en utilisant la matrice, soit en raisonnant par récurrence avec **1.b**, on obtient que $\boxed{\Delta^j(N_k) = N_{k-j} \text{ si } k \geqslant j}$ et $\Delta^j(N_k) = 0$ sinon. En particulier, vu que pour tout $k > 0$, $N_k(0) = \delta_{k,0}$, $\boxed{\Delta^j(N_k)(0) = \delta_{k,j}.}$

4.a) Comme on a vu que $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, P s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \cdots + a_n N_n$ où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est uniquement déterminé.

Alors, en calculant, pour $j \in [\![0, n]\!]$, $\Delta^j(P)(0)$, on obtient, par linéarité de Δ^j et vu la question précédente, $\boxed{\Delta^j(P)(0) = a_j}$

4.b) Soit $u = \Delta + \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $u : P \mapsto P(X+1)$, et, par récurrence, pour tout $k \geqslant 0$, $u^k : P \mapsto P(X+k)$.
Mais, pour $j \in [\![0, n]\!]$, par la formule de binôme de Newton et comme les deux endomorphismes commutent,

$$\Delta^j(P) = (u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]})^j(P) = \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]})^{j+k} \circ u^k\right)(P) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j+k} u^k(P),$$

et donc $\boxed{\Delta^j(P) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j+k} P(X+k).}$

4.c) Si $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \ P(k) \in \mathbb{Z}$, alors, d'après la question précédente, $\forall\, j \in \mathbb{N},\ \ \Delta^j(P)(0) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j+k} P(k) \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $\forall\, j \in \mathbb{N},\ \ \Delta^j(P)(0) \in \mathbb{Z}$, d'après la question **4.a)**,

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \ P(k) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell N_\ell(k) = \sum_{\ell=0}^{n} \Delta^\ell(P)(0) N_\ell(k) \in \mathbb{Z}.$$

car, vu la définition des N_ℓ, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $N_0(k) = 1 \in \mathbb{Z}$, puis si $\ell > 0$,

- si $k \geqslant \ell$, $N_\ell(k) = \binom{\ell}{k} \in \mathbb{Z}$,
- si $0 \leqslant k < \ell$, $N_\ell(k) = 0 \left(= \binom{\ell}{k}\right) \in \mathbb{Z}$.
- Enfin, si $k \in \mathbb{Z}_*^-$, $N_\ell(k) = (-1)^\ell \binom{\ell}{\ell-k-1} \in \mathbb{Z}$.

Finalement, $\boxed{[\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \ P(k) \in \mathbb{Z}] \iff \left[\forall\, j \in \mathbb{N},\ \ \Delta^j(P)(0) \in \mathbb{Z}\right].}$

5.a) On peut raisonner directement. Le fait que Δ soit surjective (vu la question **2.**) nous assure l'existence d'une famille (C_i) telle que $\forall\, i \in \mathbb{N},\ \ \Delta(C_i) = X^i$.

Alors, en posant pour tout $i \in \mathbb{N}$, $B_i = C_i - C_i(0)$, on obtient pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\Delta(B_i) = \Delta(C_i) - \Delta(C_i(0)) = X^i - 0$ et $B_i(0) = 0$. D'où l'existence.

Pour l'unicité, si A_i et B_i conviennent, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\Delta(A_i - B_i) = 0$ donc $A_i - B_i \in \operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$ et comme $(A_i - B_i)(0) = 0$, $A_i - B_i = 0$ donc $A_i = B_i$.

On peut aussi raisonner autrement (mais les outils utilisés sont fondamentalement les mêmes). Comme tout polynôme s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme constant (son cœfficient constant) et d'un polynôme du sous-espace E des polynômes s'annulant en 0, on a que E est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Donc, par théorème du rang, Δ induit un isomorphisme de E sur $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}[X]$. La bijectivité nous redonne le résultat.

$$\boxed{\forall\, i \in \mathbb{N},\ \ \exists!\, B_i \in \mathbb{R}[X] \mid \Delta(B_i) = X^i \text{ et } B_i(0) = 0.}$$

5.b) D'après la question **3.a)**, B_3 est de degré au plus 4, et d'après la question **4.a)**, $B_3(0) = 0$ $B_3 = \Delta(B_3)(0)N_1 + \Delta^2(B_3)(0)N_2 + \Delta^3(B_3)(0)N_3 + \Delta^4(B_3)(0)N_4$. Or

- $\Delta(B_3) = X^3$,
- $\Delta^2(B_3) = \Delta(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$
- $\Delta^3(B_3) = \Delta(3X^2 + 3X + 1) = 3\big((X+1)^2 - X^2\big) + 3\big((X+1) - X\big) + 0 = 6X + 6$
- $\Delta^4(B_3) = \Delta(6X + 6) = 6\big((X+1) - X\big) + 0 = 6$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
B_3 = N_2 + 6N_3 + 6N_4 &= \frac{X(X-1)}{2} + X(X-1)(X-2) + \frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{4} \\
&= \frac{X(X-1)(2 + 4X - 8 + (X-2)(X-3))}{4} \\
&= \frac{X(X-1)(-6 + 4X + X^2 - 5X + 6)}{4} = \frac{X(X-1)(X^2 - X)}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{B_3 = \frac{X^2(X-1)^2}{4}}.$$

5.c) Si $m \in \mathbb{N}$, par définition et linéarité,

$$\sum_{k=0}^{m} k^3 = \sum_{k=0}^{m} \Delta(B_3)(k) = \sum_{k=0}^{m} (B_3(k+1) - B_3(k)) = B_3(m+1) - B_3(0)$$

la dernière somme étant télescopique.

Vu l'expression trouvée à la question précédente, on a alors $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.}$ (Ouf.)

B. Évaluation de l'erreur d'une interpolation (D'après Mines de Sup 1995)

6.a) Par linéarité de la substitution, Φ est linéaire, et comme $\mathbb{R}_n[X]$ a même dimension que $\mathbb{R}^n$, il suffit de justifier l'injectivité de Φ. Or si on a P tel que $\Phi(P) = (0,\ldots,0)$, alors $0,1,\ldots,n$ sont $n+1$ racines distinctes du polynôme P de degré au plus n : donc P=0, puis $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$. Ainsi, $\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme.}}$

6.b) On a donc par bijectivité une et une seule solution à $(\mathscr{P}_n)$. Il s'agit de $\boxed{P_{n,f} = \Phi^{-1}\big(f(0),\ldots,f(n)\big).}$

7.a) On peut écrire $\Delta = u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ avec $u : f \mapsto f(x+1)$ et on a par récurrence, pour tout $k \geqslant 0$, $u^k : f \mapsto f(x+k)$.

Donc, exactement comme en **A.4.b)**, pour $j \in [\![0,n]\!]$ $\boxed{\Delta^j(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j+k} f(x+k).}$

D'où $\boxed{\big(\Delta^j(f)\big)(0) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j+k} f(k) \text{ ne dépend que de } f(0), f(1), \ldots, f(j).}$

7.b) Pour $j \in [\![0,n]\!]$, d'après **A.4.b)**,

$$\Delta^j(P_{n,f})(0) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j+k} P_{n,f}(k) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j+k} f(k) = \Big(\Delta^j(f)\Big)(0).$$

7.c) D'après **A.4.a)** et la question précédente, on a donc $\boxed{P_{n,f} = \sum_{j=0}^{n} \Big(\Delta^j(f)\Big)(0) N_j.}$

8.a) Comme f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,n]$, $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[0,n]$, donc y est bornée.
$\boxed{\text{Ainsi, } M_n = \sup_{t\in[0,n]} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \text{ existe.}}$

8.b) Soit $x \in [0,n]$, non entier. Soit $\varphi : t \mapsto f(t) - P_{n,f}(t) - KN(t)$ où K est tel que $\varphi(x) = 0$ (ce qui est possible car $N(x) \neq 0$ car x n'est pas entier.)

On a alors que φ est nulle en x et en tous les entiers $0,1,\ldots,n$, soit en $n+2$ points. Comme les fonctions qui la composent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,n]$, φ est continue sur les segments et dérivables sur les $n+1$ intervalles ouverts successifs d'extrémités ces points, ce qui nous donne $n+1$ zéros distincts (dans $]0,n[$) de φ' en appliquant $n+1$ fois le théorème de Rolle.

En réitérant ce procédé à φ', puis φ'', *etc* jusqu'à $\varphi^{(n)}$, ce qui est possible car f donc φ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on obtient par récurrence que pour tout $j \in [\![0,n+1]\!]$, φ^j admet $n+2-j$ zéros distincts (dans $]0,n[$). En particulier, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule en un $c_x \in]0,n[$.

Or $\varphi^{(n+1)} = f^{(n+1)} - P_{n,f}^{(n+1)} - KN^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)} - K(n+1)!$ car $P_{n,f}$ est de degré au plus n et N est unitaire de degré $n+1$.

On a donc finalement que $K = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$ et donc $\boxed{f(x) - P_{n,f}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} N(x).}$

8.c) Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. Si $j \leqslant x \leqslant j+1$,

$$\begin{aligned}|N(x)| = |x(x-1)\cdots(x-n)| &= \big[x(x-1)\cdots(x-j)\big](j+1-x)\big[(j+2-x)\cdots(n-x)\big]\\ &\leqslant \big[(j+1)\,j\,(j-1)\cdots 1\big] \times 1 \times \big[(j+2)\times\cdots\times n\big] = n!.\end{aligned}$$

Alors, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0, n]$,

$$\left|f(x) - P_{n,f}(x)\right| \leqslant \frac{\left|f^{(n+1)}(c_x)\right|}{(n+1)!}\,|N(x)| \leqslant \frac{M_n}{n+1}.$$

Comme $\dfrac{M_n}{n+1}$ ne dépend pas de x, on en déduit $\boxed{\left\|f - P_{n,f}\right\|_{\infty,[0,n]} \leqslant \dfrac{M_n}{n+1}.}$