Programme de colle – MP 1

Reprise du programme précédent (révisions) d'algèbre linéaire auquel j'ajoute :

1. Révisions

Révision du programme de MPSI : Déterminants.

Voir programme officiel page suivante.

Semaine prochaine : Réduction.

QUESTIONS DE COURS :

(i) Théorème du rang (u induit un isomorphisme de tout supplémentaire du noyau sur l'image + formule)

(ii) Toute matrice de rang r est équivalente à J_r.

(iii) Formule de Grassmann

(iv) Déterminant d'une transposée

(v) Déterminant de Vandermonde

(vi) Formule de la comatrice

(vii) EXERCICE 71 DES CCINP : Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x+y+z=0$, parallèlement à la droite D d'équation $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

(viii) EXERCICE 59 DES CCINP : Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P\in E$, $f(P)=P-P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

1.a) sans utiliser de matrice de f,

1.b) en utilisant une matrice de f.

2. Soit $Q\in E$. Trouver P tel que $f(P)=Q$.
Indication : si $P\in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3. (Pour les 5/2 seulement) f est-il diagonalisable ?

(ix) EXERCICE 63 DES CCINP

Soit un entier $n\geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Pour $n\geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2}=2D_{n+1}-D_n$.

2. Déterminer D_n en fonction de n.

3. (Pour les 5/2 seulement) Justifier que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A ?

2. Programme de MPSI

Déterminant

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Formes n-linéaires alternées	
Forme n-linéaire alternée.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.
Antisymétrie, effet d'une permutation.	Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$. Toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	⇆ PC : orientation d'un espace de dimension 3.
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$. Caractérisation des matrices inversibles.
Déterminant d'une transposée.	
e) Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde.	
f) Comatrice	
Comatrice.	Notation $\mathrm{Com}(A)$.
Relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A)={}^t\mathrm{Com}(A)\,A=\det(A)\,I_n$.	Expression de l'inverse d'une matrice inversible.