Programme de colle – MP 1

1. Révisions

Révision du programme de MPSI : Algèbre linéaire.
Voir programme officiel page suivante.

2. Structures algébriques

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
f) Idéaux d'un anneau commutatif	
Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.	
Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	
h) Anneaux de polynômes à une indéterminée	
Dans ce paragraphe, K est un sous-corps de $\mathbb{C}$.	
Idéaux de $K[X]$.	
PGCD de deux polynômes.	Par convention, le PGCD est unitaire. Extension au cas d'une famille finie.
Relation de Bézout. Lemme de Gauss.	⇆ I : algorithme d'Euclide étendu sur les polynômes, recherche simultanée du PGCD et des coefficients de Bézout.
Irréductible de $K[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles.	Les étudiants doivent connaître les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. L'étude des polynômes sur un corps fini est hors programme.
i) Algèbres	
Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.
Sous-algèbre.	
Morphisme d'algèbres.	

Les notions d'ordre d'un élément dans un groupe, de groupe en engendré par une partie, de groupe monogène ou cyclique, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ainsi que des révisions d'arithmétique entière seront vues plus tard.

Semaine prochaine : Révisions des déterminants, début de la réduction.

Questions de cours :

(i) Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau principal.

(ii) $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau principal.

(iii) Théorème de Bézout, lemme de Gauß dans $\mathbb{K}[X]$, $A\wedge BC=1 \iff A\wedge B=A\wedge C=1$.

(iv) $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau factoriel : existence et unicité de la décomposition en irréductibles.

(v) Théorème du rang (u induit un isomorphisme de tout supplémentaire du noyau sur l'image + formule)

(vi) Toute matrice de rang r est équivalente à J_r.

(vii) **Exercice 85 des CCINP**

(a) Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$.

i. Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.

ii. Soit $r\in\mathbb{N}^*$. En déduire que :
a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a)\neq 0$ et $\forall k\in[\![0,r-1]\!]$, $P^{(k)}(a)=0$.

(b) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P=X^5+aX^2+bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

(viii) **Exercice 87 des CCINP**

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

(a) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P\leqslant n$ et $\forall i\in\{0,\cdots,n\}$ $P(a_i)=b_i$.

(b) Soit $k\in[\![0,\ldots,n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque $\forall i\in[\![0,\ldots,n]\!]$ $b_i=\begin{cases}0 \text{ si } i\neq k\\ 1 \text{ si } i=k\end{cases}$

(c) Prouver que $\forall p\in[\![0,\ldots,n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

(ix) **Exercice 64 des CCINP**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

(a) Démontrer que $E=\operatorname{Ker} f\oplus \operatorname{Im} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2$.

(b)

i. Démontrer que $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2$.

ii. Démontrer que $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2 \Longrightarrow E=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$.

(x) **Exercice 60 des CCINP**

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M)=AM$.

(a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

(b) f est-il surjectif ?

(c) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

(d) A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$?

3. Programme de MPSI

A. Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$.
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une partie X.	Notations $\operatorname{Vect}(X)$, $\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace contenant X contient $\operatorname{Vect}(X)$.
c) Familles de vecteurs	
Familles et parties génératrices.	
Familles et parties libres, liées.	
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.
d) Somme d'un nombre fini de sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	
Somme d'un nombre fini de sous-espaces.	
Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.	La somme $F_1+\cdots+F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1+\cdots+F_p$ sous la forme $x_1+\cdots+x_p$ avec $x_i\in F_i$ est unique.

B. Espaces de dimension finie

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
En dimension n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice. Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie. Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	Sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Dimension d'une somme de deux sous-espaces ; formule de Grassmann. Caractérisation des couples de sous-espaces supplémentaires. Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $\dim\sum_{i=1}^{p}F_i\leqslant\sum_{i=1}^{p}\dim F_i$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.	Dimension commune des supplémentaires.

C. Applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphismes.	L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. Bilinéarité de la composition.
Image et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathfrak{Im}\,u=\mathrm{Vect}\big(u(x_i),\,i\in I\big)$. Image d'une base par un isomorphisme.	
Application linéaire de rang fini, rang. Invariance par composition par un isomorphisme.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$.	Notation id_E. Non commutativité si $\dim E\geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v\circ u$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2=p$ et $s^2=\mathrm{id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $i\in I$: $u(e_i)=f_i$. Classification, à isomorphisme près, des espaces de dimension finie par leur dimension. Une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie. Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E=\bigoplus_{i=1}^{p}E_i$ et si $u_i\in\mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule application $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\vert E_i}=u_i$ pour tout i.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
d) Théorème du rang	
Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathfrak{Im}\,u$. Théorème du rang : $\dim E=\dim\mathrm{Ker}\,u+\mathrm{rg}(u)$.	
e) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire. Hyperplan.	Formes coordonnées relativement à une base. Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E=H\oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan. Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

D. Calcul matriciel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces de matrices	
Espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
b) Produit matriciel	
Bilinéarité, associativité. Produit d'une matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	
Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n\geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro et de matrices nilpotentes.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
c) Transposition	
Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.	Notations ${}^tA$, A^{T}.

E. Matrices et applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases.	Notation $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$. Isomorphisme $u\mapsto\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	 Cas particulier des endomorphismes.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul.
Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.	
d) Blocs	
Matrice par blocs. Théorème du produit par blocs.	Interprétation géométrique. La démonstration n'est pas exigible.

F. Changements de bases, équivalence et similitude

Contenus	Capacités & commentaires
a) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	La matrice de passage $P_e^{e'}$ de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e. Inversibilité et inverse de $P_e^{e'}$.
Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.	
b) Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, il existe une base e de E et une base f de F telles que : $\text{Mat}_{e,f}(u) = J_r$. Matrices équivalentes. Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r. Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1. Interprétation géométrique. Classification des matrices équivalentes par le rang.
c) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables. Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace, relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, invariance par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$.	Interprétation géométrique. Notations $\text{tr}(A)$, $\text{Tr}(A)$. Notations $\text{tr}(u)$, $\text{Tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

G. Opérations élémentaires et systèmes linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations élémentaires	
Interprétation en termes de produit matriciel. Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Les opérations élémentaires sont décrites dans le paragraphe « Systèmes linéaires » du chapitre « Calculs algébriques ». Application au calcul du rang et à l'inversion de matrices.
b) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle d'un système linéaire. Système homogène associé. Rang, dimension de l'espace des solutions. Compatibilité d'un système linéaire. Structure affine de l'espace des solutions.	Interprétation géométrique : intersection d'hyperplans affines.
Le système carré $Ax = b$ d'inconnue x possède une et une seule solution si et seulement si A est inversible. Système de Cramer. § Algorithme du pivot de Gauss.	Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.