Programme de colle – MP 1

1. Révisions

Révision du programme de MPSI : structures de groupe, anneau, corps. Anneau des polynômes.
Voir programme officiel page suivante.

2. Structures algébriques

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Groupes et sous-groupes	
Groupe. Produit fini de groupes. Sous-groupe. Caractérisation. Intersection de sous-groupes. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$.	Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.
b) Morphismes de groupes	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme. Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme.	Exemples : signature, déterminant. Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.
e) Anneaux	
Anneau. Produit fini d'anneaux. Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux. Anneau intègre. Corps. Sous-corps.	Les anneaux sont unitaires. Les corps sont commutatifs.

Les notions d'ordre d'un élément dans un groupe, de groupe en engendré par une partie, de groupe monogène ou cyclique, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ainsi que des révisions d'arithmétique entière seront vues plus tard.

Semaine prochaine : Idéaux, arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$, révisions d'algèbre linéaire.

Questions de cours :

(i) Si $f \in F^E$,
- f est injective si et seulement s'il existe $g \in E^F$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
- f est surjective si et seulement s'il existe $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

(ii) Intersection quelconque de sous-groupes. Cas de la réunion de deux sous-groupes.

(iii) Images directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes.

(iv) Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes à l'aide du noyau. Réciproque d'un isomorphisme.

(v) Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$

(vi) Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

3. Programme de MPSI

Structures algébriques

Contenus	Capacités & commentaires
a) Lois de composition internes	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
b) Structure de groupe	
Groupe. Groupe des permutations d'un ensemble. Sous-groupe : définition, caractérisation.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$. Notation S_X.
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau, corps. Calcul dans un anneau. Groupe des inversibles d'un anneau.	Tout anneau est unitaire, tout corps est commutatif. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.

Polynômes

Contenus	Capacités & commentaires
a) Anneau des polynômes à une indéterminée	
Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ n'est pas exigible. Notations $\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$. Le degré du polynôme nul est $-\infty$. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Le produit de deux polynômes non nuls est non nul. ⇆ I : représentation informatique d'un polynôme ; somme, produit.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Caractérisation des couples de polynômes associés. ⇆ I : algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines.	 Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. Si $P(\lambda) \neq 0$, λ est racine de P de multiplicité 0. Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines n'est exigible.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
g) Formule d'interpolation de Lagrange	
Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \ldots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un et un seul $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i : $P(x_i) = y_i$.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que pour tout i : $Q(x_i) = y_i$.