L'anneau factoriel $\mathbb{K}[X]$

1 Propriétés de polynômes irréductibles

Propriété

Soit P un polynôme irréductible, et $A, A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Soit $P|A$, soit $P \wedge A = 1$.

(ii) $P|A_1 \cdots A_n \iff \exists i$ tel que $P|A_i$.

Démonstration

(i) $P \wedge A$ divise P qui est irréductible (et A), donc vaut soit 1, soit P (à normalisation près).

(ii) Le sens $\Longleftarrow$ ne pose pas de problème.
Pour l'autre sens, par contraposée, si P ne divise aucun des A_i, il est premier avec chacun (par (i)), donc il est premier avec le produit, donc il ne le divise pas. □

2 Décomposition en irréductibles

Théorème : Décomposition en produit d'irréductibles

Tout $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ s'écrit de manière unique à l'ordre des facteurs près sous la forme

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$$

où $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $P_1, \dots, P_k$ irréductibles deux à deux distincts unitaires, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\lambda = \mathrm{cd}\, A$, $P_1, \dots, P_k$ sont les diviseurs irréductibles unitaires de A.

Démonstration

Unicité Si A se décompose ainsi sous cette forme $\lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$, avec $P_1, \dots, P_k$ irréductibles deux à deux distincts unitaires, alors

- λ est le cœfficient dominant de A.
- Si P est un diviseur unitaire irréductible de A, alors $P|P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$ donc P divise l'un des P_i par irréductibilité, et alors, nécessairement, $P = P_i$.
  Réciproquement, chaque P_i divise A.
  Ainsi, $P_1, \dots, P_k$ sont exactement les diviseurs irréductibles unitaires de A, k en est leur nombre.
- Enfin, $P_1^{\alpha_1}|A$ et $P_1^{\alpha_1+1} \nmid A$, sinon on aurait $P_1|P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}$.
  En raisonnant de même pour chaque diviseur irréductible unitaire, on obtient pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $\alpha_i = \max\left\{m \mid P_i^m|A\right\}$.

Tout cela nous donne l'**unicité de la décomposition (à l'ordre des facteurs près) sous réserve de son existence.**

Existence Par récurrence sur $n = \deg A$.

- Si $n = 0$, il n'y a rien à faire.
- Si, pour un $n \geqslant 1$, c'est vrai jusqu'au degré $n-1$, soit A est irréductible et il n'y a rien à faire d'autre que de factoriser le cœfficient dominant, soit ce n'est pas le cas, et on écrit $A = UV$ avec $\deg U < n$ et $\deg V < n$, on applique deux fois l'hypothèse de récurrence et celle-ci s'établit. □

3 Irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$

Propriété : Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Démonstration

Si P est irréductible et $\deg P \geqslant 2$, il est non constant et ne peut pas avoir de racine car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (théorème de d'Alembrert-Gauß).

Réciproquement les polynômes de degré 1 sont bien irréductibles. $\square$

4 Irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$

Propriété

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. alors si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P, $\overline{\alpha}$ l'est aussi, de même ordre.

Démonstration

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}\left(\overline{\alpha}\right) = \overline{P^{(k)}(\alpha)}$ car les cœfficients sont réels.

Il suffit alors d'application la caractérisation de l'ordre des racines avec les dérivées. $\square$

Propriété : Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle (à discriminant strictement négatif).

Démonstration

Si P est de degré 1, il est irréductible.

Si P est de degré 2 sans racine réelle et si $P = UV$, alors ni U ni V ne peut être de degré 1 sinon P aurait une racine réelle. Donc P est irréductible.

Réciproquement, si P est irréductible et $\deg P \geqslant 2$, P a une racine complexe par théorème de d'Alembert-Gauß, qui ne peut être réelle sinon P sera réductible. Mais alors $\overline{\alpha}$ est également racine, distincte de α, donc $(X-\alpha)\left(X-\overline{\alpha}\right) = X^2 - 2(\mathfrak{Re}\,\alpha)X + |\alpha|^2$ divise P dans $\mathbb{R}[X]$ et comme P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, $P = \lambda\left(X^2 - 2(\mathfrak{Re}\,\alpha)X + |\alpha|^2\right) \in \mathbb{R}[X]$. $\square$