Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème : Division euclidienne polynomiale

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Remarque : Algorithme

C'est celui que l'on utilise en posant la division. On s'intéresse au terme de plus haut degré dans A que l'on compense en multipliant B par un monôme, et on recommence en soustrayant.

Exemple

$X^4 + 2X^3 - X + 6 = \left(X^3 - 6X^2 + X + 4\right)(X+8) + 47X^2 - 13X - 26$, en posant la division.

$$\begin{array}{r|l} A = X^4 + 2X^3 - X + 6 & \underline{B = X^3 - 6X^2 + X + 4} \\ -\left(X^4 - 6X^3 + X^2 + 4X\right) & Q = X + 8 \\ A_1 = 8X^3 - X^2 - 5X + 6 & \\ -\left(8X^3 - 48X^2 + 8X + 32\right) & \\ R = 47X^2 - 13X - 26 & \end{array}$$

Démonstration

- **Existence** : Soit $d = \deg B$, $B = b_0 + \cdots + b_d X^d$ avec $b_d \neq 0$. Si $d = 0$, le couple $(A/b_0, 0)$ convient. Sinon, on raisonne par récurrence forte sur $n = \deg A$, $A = a_0 + \cdots + a_n X^n$.
  - ⋆ Si $n < d$, $(0, A)$ convient.
  - ⋆ Si le résultat est vrai pour tout polynôme de degré au plus $n-1$, alors en s'inspirant, de l'algorithme, on écrit $A = \dfrac{a_n}{b_d} X^{n-d} B + A_1$ avec $\deg A_1 \leqslant n-1$, c'est-à-dire qu'on pose $A_1 = A - \dfrac{a_n}{b_d} X^{n-d} B$.
    Par hypothèse de récurrence, on a $(Q_1, R) \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A_1 = BQ_1 + R$ et $\deg R < \deg B$.
    Alors $\left(Q_1 + \dfrac{a_n}{b_d} X^{n-d}, R\right)$ convient bien.
- **Unicité** : Si (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) conviennent, alors $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$.
  Vu les degrés, on en tire $Q_1 = Q_2$, puis $R_1 = R_2$. □

Remarque

On peut donc écrire un algorithme de division euclidienne de polynômes, stockés par exemple sous forme de liste. C'est très facile en récursif vu la récurrence constructive. Essayez !